Colles de Maths - semaine 16
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

— p est un projecteur si et seulement s'il est idempotent

— s est une symétrie si et seulement si elle est involutive

— Isomorphisme entre l'image et un supplémentaire du noyau.

Exercice 1 Soit E un K-espace vectoriel, soient p et q deux projecteurs sur E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Interpréter cette condition au moyen de $\operatorname{Ker} p$, $\operatorname{Im} p$, $\operatorname{Ker} q$, $\operatorname{Im} q$.
3. Si les conditions du 1. sont vérifiées, décrire le projecteur $p+q$.

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f, g deux endomorphismes de E.

1. On suppose que g est un projecteur. Montrer que
$$\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} g \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g).$$
2. On suppose que f (et non plus g) est un projecteur. Montrer que
$$\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g).$$
3. On suppose que f et g sont des projecteurs. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si
$$\operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} g \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g).$$

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^5 = f$. Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Soit $f \in (E)$ tel que $P(f) = 0$. Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 4 Soit r un entier impair positif. Soit, pour $a \in \mathbb{R}$, $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto |x-a|^r$.
Montrer que la famille $\{f_a,\, a \in \mathbb{R}\}$ est libre dans l'espaces des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Soit, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(ax)$.
Montrer que la famille $\{f_a,\, a \in \mathbb{R}_+^*\}$ est libre dans l'espaces des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Soit E un K-espace vectoriel, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$.
Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k$ en fonction de u et v.

Exercice 7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E^* son espace dual. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E. On note e_i^* l'application qui à un vecteur $x \in E$ fait correspondre sa coordonnée devant e_i.

1. Montrer que les e_i sont bien définies et sont des formes linéaires.
2. On suppose que I est un ensemble fini. Montrer que $(e_i^*)_{i \in I}$ est une base de E^*.
3. On suppose que I est infini. Montrer que $(e_i^*)_{i \in I}$ est libre mais pas génératrice.